正規分布の標準化

問題

7 人の生徒が全国統一テストを受験した.
それぞれの生徒の試験の点数 $X_1, \ldots, X_7$ は独立で, 平均 49, 標準偏差 9 の正規分布に従っていると仮定する.
このとき, 次の問いに答えよ.

(1) X_1 が 60 点以上である確率を求めよ.

(2) 7 人中いずれか 1 人だけが 60 点以上をとり, 残りの 6 人が 60 点未満となる確率を求めよ.

(3) 7 人の点数の標本平均 $\dfrac{X_1 + \ldots + X_7}{7}$ が 52 点以上である確率を求めよ.

$X_1 \sim N(49, 9^2)$

標準化

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(1) $P(X_1 \geqq 60)$

$= P\left(\dfrac{X_1-\mu}{\sigma} \geqq \dfrac{60-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(\dfrac{X_1-\mu}{\sigma} \geqq \dfrac{60-49}{9}\right)$

$= P\left(Z \geqq \dfrac{11}{9}\right)$ $Z \sim N(0,1)$

$= 0.1112$

$\underline{0.1112}$

(2) $0.1112 \times (1-0.1112)^6 \times 7$

$= 0.3837$

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$

(3) $Y = \dfrac{X_1 + \cdots + X_7}{7}$ とする.

$P(Y \geqq 52)$

$= P\left(\dfrac{Y-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \geqq \dfrac{52-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\right)$

$= P\left(Z \geqq \dfrac{52-49}{\frac{9}{\sqrt{7}}}\right) = P\left(Z \geqq \dfrac{3}{\frac{9}{\sqrt{7}}}\right) \fallingdotseq P(Z \geqq 0.88)$

$\underline{0.1894}$